~~19~~ 20-

DEMOSTRACION

DE LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

FUNDADA SOBRE ESTOS PRINCIPIOS.

El círculo es al cuadrado circunscripto como la circunferencia es á cuatro diámetros

Los círculos están entre sí en la razon de los cuadrados de sus diámetros.

Dase á luz sin corregir los defectos materiales que se observan en el contexto á fin de que los inteligentes (fundados en sus nociones, y en la comun opinion de que es quimérica la proposicion) al tiempo de cebarse en ellos, no pasen sin masticar las circunstancias que recomiendan á la razon geométrica, por una de las verdades mas constantes, de cuantas contienen estas ciencias: en atencion á que el círculo, y el cuadrado circunscripto, se hallan reducidos á dos razones geométricas; por cuyos términos se nos proporciona ver en efectivo: esto es por número; como la superficie del círculo, equivale á un paralelogramo de base igual á su periferia, y de altura medio radio; y como la superficie del cuadrado circunscripto, equivale á otro paralelogramo de base igual cuatro diámetros, y de altura tambien medio radio. Decimos en efectivo, porque hasta aquí los establecidos principios sobre que nos apoyamos, á pesar de infalibles, de ninguna duda nos sacaron; mas ahora ya no son proposiciones bagas, pues nos ponen de manifiesto, y aun palpable, como las unidades cuadradas que corresponden al círculo, son tan exactas como las que corresponden al cuadrado: por lo mismo, la razon que produce este milagro, lejos de ser una quimera, es una verdad innegable: como en efecto poco entiende, quien espera se publique alguna cosa en contrario; y aun mucho menos contra el cubo de la esfera, que se insinua á lo último, por consecuencia necesaria.

POR D. PABLO VALLAURE,

VECINO DE OVIEDO Y NATURAL DE LA VILLA DE BERGA PRINCIPADO DE CATALUÑA.

CON LAS LICENCIAS NECESARIAS EN OVIEDO.

POR D. FRANCISCO CÁNDIDO PEREZ PRIETO, AÑO DE 1818.

Ya que por una casualidad en que intervino alguna precision, conocimos (sin ser geómetras de profesion) no solo la necesidad de una razon exacta entre el diámetro y la circunferencia del circulo, sino que no puede suplirse por otra aunque sea la mas próxima á la verdadera; por la misma, y sin otros principios, ni otras ideas que los calculos y experiencias que nos fueron ocurriendo, nos determinamos buscarla: en efecto, sin mas guia que trepar por puntos de fantasia, despues de varios tropiezos y algunos engaños, conseguimos encontrarla. De hallada, á nuestro modo la escrivimos; mas en atencion á nuestra poca pericia en orden á expresar nuestros conceptos, dimos en desconfiar no tanto de la razon hallada, cuanto del modo de producirla; por lo que tubimos á bien manifestar nuestro papel á ciertos inteligentes, á fin de que dado que no hallasen alguna razon que oponernos, nos ilustrasen para exponerla con buen orden; pero estos despues de copiar lo mas esencial del papel, en lugar de doctrinarnos, tiraron á que abandonásemos el pensamiento, alegando entre otras cosas, que los geómetras mas insignes que se han conocido desde Anaxagoras hasta el dia en que van corridos mas de veinte y cuatro siglos, se habian desvelado en busca de la razon que ofrecemos, hasta agotar sus talentos, y que al fin ninguno pudo encontrarla: que por lo mismo no podia ser cierta la nuestra; y sí una consumada mania, empeñarnos en hallarla. Sin embargo, lexos de amilanarnos por eso, (prescindiendo de lo hecho) empezamos nuevamente por exâminar la causa, por que entre tantos y tan despejados ingenios, no habian hallado una cosa, que parece facil de encontrarse, y á pocos pasos que dimos sobre ciertos libros, que empezamos á leer con mucho estudio, hallamos habia consistido en el método que tomaron, tanto mas opuesto al intento, cuanto aparenta ser el mas á proposito para el caso: pues en lugar de conducirlos á la razon que deseaban, los condujo á persuadirse, que á punto fixo es imposible encontrarse; segun se infiere del sistema de los infinitamente pequeños que de resultas inventaron. Este consiste en dos poligonos regulares, semejantes, y de millones de lados, uno inscripto al circulo, y otro circunscripto; cuyo radio que suponen comun, é igual diez millones, se puede acrecentar, y á proporcion los lados de los poligonos, hasta confundirse los senos con las tangentes: es decir los lados del poligono inscripto con los lados del circunscripto; y en este caso toman un perimetro medio, que suponen igual á la periferia del círculo: luego comparan esta con el radio duplo, y la razon que hallan dicen es la que corresponde entre el diámetro, y la circunferencia del círculo ¿Pero quien

no ve que toda razon hallada por este medio, debe ser precisamente menor, ó mayor que la verdadera? porque el perimetro medio, siempre lo es de otro poligono, el qual por mas que se multipliquen sus lados nunca puede degenerar de su especie, ni coincidir con la periferia del circulo. Pues ahora el que este metodo, ó esta formula sea la mas contraria que pudo imaginarse no cabe la menor duda, porque en el mismo hecho de hallarse generalmente admitida, y celebrada por una de las ideas mas sutiles y ventajosas que pudieron concebirse, forma como una barrera, para que nadie entre á creer, que puede haber otro modo de hallar la razon verdadera: en efecto los profesores cuanto mas impuestos en el sistema, y en los grandes esfuerzos que inutilmente hicieron los mas famosos geómetras, tánto mas se confirman en que es una cosa imposible; mas nosotros gobernados por ciertos dictamenes que en Lógica pueden verse, y enterados por otra parte, que en geometría vale mas maña que grandes esfuerzos, no podemos menos de reconvenir á todos ¿ por qué entre tantos filósofos racionales cuantos ha habido despues del famoso Arquimedes ¿ viendo que el mencionado sistema, se halla reducido á un teorema que no tiene otro arrimo, ni otro apoyo que estar fundado sobre si mismo, en lugar de despreciarlo segun reglas, se han metido mas por el? Reflexionando pues acerca de este que graduamos de absurdo, y quizas el mas autorizado del mundo, no podemos menos de pensar, si persuadidos todos de que los primeros maestros, fueron hombres de otra esfera superior á la nuestra, de unos talentos tan extraordinarios y sublimes, que lo que ellos no alcanzaron ya nadie lo alcanzaría, y que por lo mismo tratando de buscar el punto fixo, todos miraron por donde fueron sus venerados maestros, y ninguno por donde debieron ir: resultando de este descuido, caer todos en un mismo error, que estrañamos tanto mas, cuanto por ellos mismos sabemos, que la geometría es inagotable de ideas que ofrece muchos caminos: en efecto, en solo el cuadrado de la hipotenusa, hallamos cuatro distintos que con cualquiera de ellos, se encuentra que el cuadrado formado sobre el lado maior de un rectangulo, es igual á los formados sobre los otros dos; por donde se prueba, que el cuadro inscripto, es mitad del circunscripto. Para valuar la area de un cuadrado de nueve ú otro cualquiera, hasta ahora no hemos visto otra regla, que la de multiplicar la raiz por si misma esto es $9 \times 9 = 81$; y sin embargo lo podemos verificar por otras tres fórmulas bien diferentes.

1 Primera: á la manera que para valuar un circulo, por lo regular

se executa multiplicando la semicircunferencia por el semidiametro, asi el supuesto cuadrado de nueve, multiplícando el semiperimetro por el semidiametro recto: llamamos diametro recto la linea c, que pasa por el centro de la fig. 1: la cual por construccion, es igual á la raiz, esto es á 9. segun esta, el perimetro compuesto de la raiz cuadrupla, es igual 36: luego $\frac{36}{2} \times \frac{9}{2} = 81$.

2 Segunda: en progesion Aritmética de tantos términos, cuantas unidades tiene de raiz, cuyo primer término empezando por un ángulo fig. 2. es la unidad: la diferencia es 2. el número de los términos 9. el último término 17. luego $S=(17+1)\times\frac{9}{2}=81$.

3 Tercera; tambien en progresion Aritmética que empezamos por el centro, (fig. 3) poniendo en el la unidad cuadrada que ha de servir de medida: el perimetro de esta unidad, forma el primer término igual 4. la diferencia es 8. el numero de los términos 5. el último término 36. Esta progresion que se compone de solo lineas, ó perimetros, solo nos sirve para formar otra de término menos; y es la que nos interesa: verificamosla quitando el primer término de cada uno de los cinco dichos: asaber por primer término diximos igual 4. luego $4-4=0$: he aqui porque se reduce á otra de solos cuatro términos; y por que la unidad del centro no forma término, y si cantidad que debe unirse á la suma de los que ahora iran saliendo. Por segundo término de la indicada progresion correspondia igual 12. luego $12-4=8$, este forma el primer término: por término tercero correspondia 20: luego $20-4=16$. por cuarto término correspondia $28-4=24$. por quinto $36-4=32$. Sumanse pues ahora los términos que han salido que son 8,16,24,32 y unaseles la unidad del centro, y será $S=(8+32)\times(\frac{4}{2})+1=81$.

Nos ha parecido conveniente exponer las expresadas fórmulas, no solo para confirmarnos en que la geometría puede contener otras muchas inauditas para todo género de figuras, sino tambien por lo que nos interesa, para seguir hasta concluir con la idea de manifestar nuestro concepto. Este no se funda en ellas, ni en que todos nacimos geómetras capaces de forjar ideas tan impensadas: mucho menos en que no yerra, ni puede errar el instinto natural de los hombres que carecen de pasiones altaneras, pues semejantes presunciones siempre suelen redundar en ridiculeces como les sucedio á otros muchos; pero si se apoya en que

El circulo es al cuadrado circunscripto como la circunferencia es á cuatro diámetros.

4 De este principio que nadie niega ni es posible, se infiere como la

area del circulo, con respecto á la area del cuadrado circunscripto, equivale á una fraccion, cuyo numerador, es la circunferencia que corresponde al diámetro, y el denominador su mismo diámetro cuadruplo. Por consiguiente la area de un circulo de unidad de diámetro segun la razon de 7:22 equivale á una fraccion igual $\frac{22}{28}$ ÷ $\frac{11}{14}$ Compruebase pues 7:22:: 1: 3 + $\frac{1}{7}$ luego $(\frac{3+\frac{1}{7}}{2}) \times \frac{1}{2} = \frac{22}{14} \times \frac{1}{2} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$

Los circulos están entre si en la razon de los cuadrados de sus diámetros.

5 Este otro principo tambien infalible, nos dicta que un circulo inscripto en el cuadrado de nueve, es á otro circulo inscripto en la unidad cuadrada, como el cuadrado de nueve, á la unidad cuadrada; por que á no ser asi, suceder ia, (segun Euclides cuya es la proposicion) que el cuadrado de nueve seria á la unidad cuadrada, como el circulo inscripto en el cuadrado de nueve, á un espacio menor, ó mayor que el que corresponde al circulo inscripto en la unidad cuadrada. Demuestra con su admirable ingenio primero como no puede ser á otro espacio menor, y luego como no puede ser á otro mayor, pero con tanta evidencia que nadie puede dudar del hecho; sin embargo son unas demostraciones tan estériles, que en sustancia nada dicen, mientras no se de valor exácto á cada uno de los circulos: siendo pues este el empeño vamos á verificarlo.

6 Suponiendo una linea igual nueve, decimos que tomandola por raiz de un cuadrado, y multiplicándola por si, nos produce la fig. 4, compuesta de 81 cuadrados, que la raiz de cada uno es la unidad: si la tomamos por diagonal de otro cuadrado, y la multiplicamos tambien por si, nos produce la fig. 5, compuesta de 81 cuadrados que la diagonal de cada uno es la unidad: asi mismo tomandola por diámetro de un circulo, nos produce la fig. 6, compuesta de 81 circulos cuyo diámetro de cada uno, es tambien la unidad. En la inteligencia de que no cabe duda acerca del compuesto de las expresadas tres figuras, tenemos que el cuadrado fig. 5, y el circulo fig. 6, se hallan como inscriptos en el cuadrado fig. 4: verificalo la misma suposicion, y por que el lado de este la diagonal del otro, y el diámetro del circulo, se hallan entre paralelas y entre si tambien lo son, consiguientemente el circulo inscripto, es totalmente igual á los 81 circulos de unidad de diámetro que conceptuamos como inscriptos en los 81 cuadrados de unidad de raiz fig. 4: advertimos esto, en atencion aque el dicho circulo fig. 6, no es subsceptible de las 81 divisiones en que se hallan divididos ambos cuadrados puesto que lo hemos de considerar como á estos.

7 Ahora si del cuadrado de nueve fig. 3 valuado en progresion Arit-

metica, tomamos la suma de sus cuatro términos por un antecedente, y á la unidad del centro (que llamaremos complemento) por su consiguiente, formaremos una razon octoagesima: esto es como $80:1$. verifiquemos pues la tal razon en cada una de las expresadas figuras.

Al cuadro circunscripto fig. 4 se le tiran dos diagonales AC, BD, y queda dividido en cuatro triángulos cuyo valor de cada uno es igual $20+\frac{1}{4}$: al inscripto fig. 5 se le tiran otras dos EG, FH, y queda dividido en cuatro triángulos cada uno igual $10+\frac{1}{8}$: al circulo inscripto fig. 6, se le tiran dos diámetros perpendiculares uno á otro IL, KM, y queda dividido en cuatro sectores, ó triángulos curbilineos cuyo valor de cada uno, por lo mismo que se ignora para hallarle que es el obgeto, es menester apoyando en el centro, tirarle un circulo de unidad de diámetro esto es $km=1$.

8 Dispuestas asi las tres figuras; y en atencion á que cuando á cantidades iguales se quitan cosas iguales quedan iguales, supongamos quitada la unidad que llamamos complemento del centro de la fig. 4, y puesta fuera en c: asi mismo la media unidad cuadrada del centro de la fig. 5 y puesta fuera en n: como tambien el circulo de unidad de diámetro del centro de la fig. 6, y puesta en q: con tales separaciones conseguimos de una vez, el quitar la fraccion de cada triángulo en que tenemos dividido el cuadrado fig. 4: el transformarles en cuatro trapecios de valor cada uno igual 20: formar de todos cuatro un antecedente igual 80; y el reducir dicha figura á una razon octoagésima cuyo consiguiente se halla fuera en $c=1$: asi mismo el extraer la fraccion de cada triángulo de la fig. 5: transformarles en cuatro trapecios cada uno igual $\frac{20}{2}$ formar de todos ellos otro antecedente igual $\frac{80}{2}$ y el reducir dicha figura á otra razon octoagésima, cuyo consiguiente se halla fuera en $n=\frac{1}{2}$: como tambien el extraer la fraccion contenida en cada sector en que se halla dividido el circulo fig. 6: transformarles en cuatro trapecios curbilineos compuestos de 20 circulos de unidad de diámetro cada uno, formar de todos cuatro otro antecedente igual 80 circulos de unidad de diámetro; y quedar tambien reducido á otra razon octoagésima, cuyo consiguiente igual un circulo de unidad de diámetro, se halla fuera en q: con que tenemos dividida cada una de las tres figuras, en dos cantidades desiguales en razon octoagésima segun nos propusimos.

9 Cuando tres cantidades desiguales se hallan divididas por un mismo número, los quocientes estan entre si en la misma razon de sus todos.

10 En toda razon desigual mayor, el antecedente es multiplice del consiguiente: por lo mismo el complemento c, multiplicado por 80, es igual

á los trapecios de la fig. 4: el complemento n, multiplicado por 80, es igual á los trapecios de la fig. 5, y el complemento q, multiplicado por 80, igual á los trapecios de la fig. 6. Por manera que si á cualquiera de los complementos c, n, q, se le desmembra de un solo punto; su-cedera que multiplicado por 80 no coincidira con sus respectivos trapecios por falta de 80 puntos: los trapecios no formaran su multiplice, ó antecedente: la razon octoagésima quedara desecha, y de consiguiente la comparacion á que vamos trastornada. Pero supuesta la integridad: esto es que los complementos son partes aliquotas de sus respectibos todos: bien podemos decir alternando, que los trapecios del cuadrado fig. 4, se han con los trapecios del cuadrado inscripto figura 5 como el complemento c al complemento n, pero queda expresado que los trapecios del primero son compuestos de 80 unidades cuadradas; los del segundo son compuestos de 80 mitades, y el complemento c=1: luego $80 : \frac{80}{2} :: 1 : \frac{1}{2}$.

11 Igualmente podemos decir: los trapecios del cuadrado fig. 4, se han con los trapecios del circulo inscripto fig. 6 como el complemento c, al complemento q; pero sabemos que los trapecios del cuadrado son compuestos de 80 unidades cuadradas: los trapecios del circulo son compuestos de 80 circulos de unidad de diámetro, y el complemento c es la unidad: luego $80 : 80q :: 1 : q$.

Llegó el caso de haber de dar valor al complemento q, cuya area corresponde á un circulo de unidad de diámetro, pues dado á este su exacto valor, sabremos el de sus respectivos trapecios, puesto que forman su multiplice, ó antecedente igual 80.

12 Dos métodos tenemos para dar valor á un circulo de unidad de diámetro: acerca del primero, como su valor verdadero, no consiste en suponer que es realmente posible, por cuanto hasta ahora ninguno de cuantos se han desvelado sobre el particular, ha podido demostrar, la proposicion de imposible: siendo asi que en Matematicas, toda proposicion que no pueda demostrarse de un modo palpable, debe excluirse de tales artes ó en defecto borrarlas el título de ciencias exáctas: como ni tampoco en contraer la casualidad, ni motivos que nos obligaron á buscar los diámetros de cuatro ruedas, cuyo engargante, exígia la mayor exáctitud; ni menos en referir los indecibles desvelos, ideas, discursos y experiencias costosas; ni otras muchas cosas, que solo pensar en escrivirlas, se indisponen las potencias hasta dolernos la cabeza; y si solo en que el valor del circulo que se busca, sea tan real y verdadero, que no dexe ninguna razon de dudar: decimos que si á la razon de $7 : 22 = 1 : 3 + \frac{1}{7} =$

$1:\frac{22}{7}$: se agrega al consiguiente $\frac{22}{7}$, la suma igual $\frac{1}{140}$ tendremos desempeñado el asunto, sin tener que atribuirlo á milagro: en efecto, y en la firme inteligencia de que nada puede interesar á los matematicos el saber por sus averiguaciones, ó por que nosotros se los manifestemos los medios que nos sirvieron para hallar y conocer que el consiguiente de dicha razon de $7:22=1:\frac{22}{7}$ padecia la expresada falta vamos á aplicarsela sin mas preámbulos, esto es $1:\frac{22}{7}+\frac{1}{140}=1:\frac{3087}{980}=1:\frac{63}{20}=20:63$. He aqui la verdadera razon del diámetro á la circunferencia del circulo que damos por asentada: pues nos produce la area exácta que corresponde á un circulo de unidad de diámetro igual $\frac{63}{20\times 4}=\frac{63}{80}$

13 Segundo: á la manera que el grande Euclides fundado en que si de la mayor de dos cantidades desiguales, se quita una parte mayor que su mitad, y del residuo se quita tambien otra parte mayor que su mitad; continuando siempre la misma operacion, llegará á resultar una parte menor que la cantidad menor propuesta, dedujo el teorema en que demuestra como los circulos estan entre si, en la razon de los cuadrados de sus diámetros; asi nosotros suponiendo dos cantidades desiguales, que la mayor contenga á la menor nueve veces (por cantidad mayor se ha de entender un lado del cuadrado circunscripto fig. 4, y por cantidad menor un lado de su complemento c) decimos que si con la cantidad menor pasamos á medir á la mayor, despues de entrar en ella 8 veces, la parte restante quedara igual á la cantidad menor; pero si á esta se la desmembra de $\frac{1}{18}$ y con esta falta pasamos á medir á la cantidad mayor, despues de entrar en ella ocho veces, la parte restante excedera á la cantidad menor propuesta en $\frac{9}{18}$, y por consiguiente resultara que $(1+\frac{1}{2})^2$ no podra caber en el complemento c de la dicha figura 4: como por lo contrario $(1-\frac{1}{18})^2$ no podra llenar aquel espacio. De esta idea deducida del mismo lema en que fundó Euclides para su teorema y de otras que omitimos, se infiere que la area correspondiente al complemento q, la cual valuada segun la razon de $7:22$, equivale á una fraccion igual $\frac{11}{14}$ se halla en otro igual caso; por lo que mientras no se le agregue $\frac{1}{560}$ que le falta, no podra llenar su propio espacio; y mucho menos á los trapecios compuestos de 80 circulos de unidad de diámetro, multiplicado por 80, pues le faltarian $\frac{80}{560}$ para llenarlos. Ahora siendo lo dicho muy cierto decimos que en tanto el circulo es al cuadrado circunscripto como la circunferencia es á cuatro diámetros; y los circulos estan entre si, en la razon de los cuadrados de sus diámetros, en cuanto el complemento q, de la fig. 6, equivale á una fraccion igual $\frac{11}{14}+\frac{1}{560}=\frac{63}{80}$ pues

que desmembrado de la señalada cantidad, no puede llenar su propio espacio, y mucho menos á los trapecios que forman su antecedente. En suma sucedera que los trapecios del cuadrado circunscripto fig. 4 estarán con su complemento c, como los trapecios del circulo inscripto fig. 6, á otro espacio menor del que corresponde á su complemento q, lo cual es imposible pues queda demostrado como 80:80q::1:q: luego 80:q$=\frac{63}{80}$ $\times 80::1:\frac{63}{80}=80:63::1:\frac{63}{80}$.

14 Por otro estilo: las figuras 4,5,6, como procedentes de una misma raiz igual 9x9, por hallarse construidas entre paralelas son precisadas á formar tres areas, ó tres todos desiguales y de un valor determinado en cada una tan exácto, que no es posible en alguna de ellas, discrepar un pelo del verdadero: en prueba de ello, tenemos que si se las divide por un mismo número 81, salen los quocientes desiguales c,n,q, tambien de un valor determinado, y en la misma razon de sus todos, por lo que si se les vuelve á multiplicar por 81, cada uno coincide con el suyo: en efecto $c=1\times 81=81$: $n=\frac{1}{2}\times 81=40+\frac{1}{2}$: $q=\frac{63}{80}\times 81=63+\frac{63}{80}$ Pues ahora: sin embargo de que los espresados todos, en fuerza de su construccion, es imposible dexen de ser igualmente verdaderos, tanto que ninguno admite la menor réplica: con todo, en atencion á la repugnancia, que ciertos matemáticos sublimes (sordos á los gritos de su conciencia) quieren aparentar contra el circulo fig. 6, diciendo que su valor exácto no puede ser conocido, por cuanto no es figura rectilinea: vamos á desengañarles por medio de la razon de 7:22, por lo mismo que es su favorita; y por que unos la suponen mayor que la verdadera, por que asi lo hallaron escrito y otros menor que la verdadera, por que la experimentaron por si mismos: aunque todos de comun consentimiento; la suponen muy próxima á la verdadera: en esta suposicion, veamos quien tiene razon, y de paso verificaremos el intento.

Segun la razon de 7:22, un circulo de unidad de diámetro, equivale á una fraccion igual $\frac{11}{14}$ por lo mismo, supuesto que el circulo fig. 6, se halla compuesto de 81 circulos de unidad de diámetro, tenemos en el, que su area total equivale á un todo igual $\frac{11}{14}\times 81=63+\frac{9}{14}$ Ahora para conocer que este producto, es menor que el verdadero, basta observar que la fraccion sobrante igual $\frac{9}{14}$ perteneciente al complemento q, resulta $\frac{1}{7}$ menor que la primitiva: pues $\frac{11}{14}-\frac{1}{7}=\frac{9}{14}$ de que se infiere que los trapecios compuestos de 80 circulos de unidad de diámetro, en el acto de reducir las 81 fracciones que componen el todo á unidades, se lo han apropiado para completar las suyas: pues $80\times\frac{11}{14}=62+\frac{12}{14}+\frac{1}{7}=63$; como tam-

bien la regla para encontrar la verdadera falta que padece un circulo de unidad de diámetro valuado segun dicha razon de $7:22$ igual $\frac{11}{14}$ y es partiendo aquel $\frac{1}{7}$ que se apropiaron los trapecios entre los 80 circulos que componen estos, y el quociente será la falta que padece: en efecto $\frac{1}{7}:80=\frac{1}{560}$. He aqui porque el valor determinado de un circulo de unidad de diámetro equivale á una fraccion igual $\frac{11}{14}+\frac{1}{560}=\frac{63}{80}$. Y he aqui tambien como solo en este caso, se verifica que los trapecios del circulo fig. 6, son multiplices de su mismo complemento, y el porque decimos que si con el complemento $q=\frac{63}{80}$ pasamos á medir el todo, despues de entrar en él 80 veces, la parte restante queda igual $q=\frac{63}{80}$ en que se confirma que este valor determinado por precision es tan exâcto como $n=\frac{1}{2}$ y como $c=1$. Persuadidos pues de que no es posible discurrir cosa en contrario: nos rectificamos en que un circulo de unidad de diámetro equivale á una fraccion igual $\frac{63}{80}$ que la razon entre el diámetro y la circunferencia del circulo es como $\frac{80}{4}:63$: que el circulo es al cuadrado circunscripto como $63:80$; y que los circulos estan entre si como los cuadrados de sus diámetros: esto es $63:\frac{63}{80}::80:1$.

Aunque es muy cierto no puede darse en matemáticas alguna proposicion mas claramente demostrada: que por lo mismo podriamos dispensarnos de otras que parecerán escusadas; sin embargo, por condescender con ciertos amigos, quienes hechos cargo de que « es desabrida la verdad á los que son por largo tiempo poseidos del engaño » del cual, y de sus elevadas (mejor diremos de sus tenebrosas) matemáticas, costará un triunfo apearles: nos apremian á que evidenciemos el pensamiento por cuantos medios sea posible; y aque se imprima afin de que pueda llegar á manos de algunos profesores sobresalientes é ingenuos, de quienes no dudan que lo mismo sera ver una verdad que tanto interesa, que sin reparar en lo rústico del trage, ni preguntar de donde viene, se abrazarán inmediatamente con ella. Confiados pues en que nos dispensarán su justificada censúra: como tambien en la recta razon y juicio de los discretos, contra los que se opondrán sin exponer su propia firma, vamos por otro estilo, del que se infiere la causa, porqué los talentos mas profundos que se han conocido, no dieron en la misma idea de suponer una linea$=9$, por raiz de un cuadrado fig. 7, por diagonal de otro fig. 8, y por diámetro de un círculo fig. 9: por medio de las cuales divididas en dos partes desiguales en razon octoagésima, segun se observan entre trapecios y complementos: sin mas antecedentes, que alguna razon entre el diámetro, y la circunferencia del circulo de las que nos dexaron los

antiguos, al golpe estos mismos habrian encontrado con la area exâcta del circulo y con la razon del diámetro, á la circunferencia verdadera, todo á un tiempo.

15 Para una cosa tan inesperada, y que aun parece proyecto inconcevible: es menester suponer una base ó una línea irracional, semejante á la raiz de un número no cuadrado, de la cual es imposible averiguar su valor fijo, pues que si se multiplica por si, produce un número algo mayor que aquel de donde fue extraida; pero que sin embargo las unidades que compone, siempre son muy ciertas y verdaderas: de que se infiere que el poco mas dimana precisamente de la fraccion que resta al extremo de la línea. Supuesto lo cual, decimos, que lo mismo debe suceder con el circulo inscripto fig. 9, valuado por alguna razon algo menor, ó mayor que la verdadera reducido á un paralelogramo de unidad de altura, y de base sesenta y tres unidades, mas una fraccion, en la que precisamente deben hallarse reunidos todos los puntos de engaño, diseminados antes en todo el circulo. En esta inteligencia, decimos que en virtud de que los trapecios del cuadrado fig. 7, se han con los trapecios del circulo inscripto fig. 9, como el complemento c, al complemento q, los maestros antiguos con cualquiera de las razones que nos dexaron escritas, habrian encontrado la exâcta superficie del circulo, y la razon del diámetro á la circunferencia verdadera supuesto que ya tenian el valor exâcto de los trapecios que forman el primer consiguiente.

Que las sesenta y tres unidades del paralelogramo á que suponemos reducído el circulo fig. 9, corresponden exâctamente á los trapecios que forman el primer consiguiente, y la fraccion sobrante al complemento que forma el cuarto término, es lo que necesitamos hacer ver; pero para evitar hasta la mas mínima razon de dudar, tenemos á bien exponer dos egemplares por medio del cuadrado inscripto fig. 8, el cual por lo mismo que se ignora el valor de su perimetro, le suponemos en igual caso, para manifestar de este modo, que aun cuando no tuviesemos noticia alguna del cuadrado de la hipotenusa, habriamos encontrado de esta manera que es igual mitad del circunscripto.

16 En efecto supóngase que el cuadrado inscripto no es mitad del circunscripto y si igual $\frac{99}{200}$ decimos pues, que con solo reducir las 81, fracciones en que le tenemos dividido (vease la fig. 5) á unidades en esta forma $\frac{99}{200}\times 81 = 40+\frac{19}{200}$ aplicando las 40 que aparecen á los trapecios, sin atender á la fraccion que resta para el complemento, se encuentra que este, precisamente es igual medio, pues $80:40::1:\frac{1}{2}$: en que

se observa como en el acto de la reduccion, los trapecios se compensan tomando del complemento la falta que padecian, motivado del falso supuesto: por eso la fraccion que resta para el complemento aparece igual $\frac{19}{200}$ por que los $\frac{80}{200}$ con que se halla de menos, se han completado los trapecios.

17 Supongamos tambien que no es mitad del circunscripto, y si igual $\frac{101}{200} \times 81 = 40 + \frac{181}{200}$: aqui se observa que los trapecios en el acto de la reduccion se han desprendido de los $\frac{80}{200}$ que tenian de exceso, el cual se ha trasladado á la fraccion sobrante: esto es al complemento, y por lo mismo aparece $\frac{80}{200}$ mayor de lo que era; pero como las 40 unidades siempre corresponden á los trapecios, y la fraccion sobrante al complemento, por eso resulta siempre, que $80:40::1:\frac{1}{2}$.

Por el expresado artificio parece que los trapecios del cuadrado inscripto, son comparables á un baso bien asentado, que admite líquido hasta que se llena; pero despues no admite gota sin verterla: lo advertimos por que lo mismo debe suceder con los trapecios del circulo inscripto fig. 9.

Visto como por medio de una superficie algo menor que la verdadera; y por otra algo mayor que la verdadera, se encuentra indistintamente, la superficie verdadera que corresponde al cuadrado inscripto y supuesto termina á que sirva de modelo para encontrar la superficie del circulo, y la razon entre el diámetro y la circunferencia verdadera, por medio de cualquiera próxima á la verdadera de las que nos dexaron los antiguos vamos á verificarlo por medio de dos egemplos.

18 Sea el primero por la razon de Adriano Mecio como $113:355$: decimos pues que segun esta razon un circulo de unidad de diámetro equivale á una fraccion igual $\frac{355}{452}$. Y supuesto que la area total del circulo inscripto fig. 9 se halla compuesta de 81 fracciones cada una igual $\frac{355}{452}$ tenemos que este circulo equivale á un paralelogramo igual $\frac{355}{452} \times 81 = 63 + \frac{279}{452}$ pues ahora apliquense las 63 unidades á los trapecios que forman el primer consiguiente, y digase sin mas ver; pero los trapecios del cuadrado circunscripto fig. 7 son compuestos de 80 unidades cuadradas: los trapecios del circulo inscripto fig. 9 son compuestos de 63 unidades cuadradas, y el complemento $c=1$: luego $80:63::1:\frac{63}{80}$

19 Segundo: sea por la razon de $105:331$: segun esta (que por mas sencilla preferimos á otras muchas menos excesivas) un circulo de unidad de diámetro equivale á una fraccion igual $\frac{331}{420}$ consiguientemente la area total del circulo fig. 9, equivale á un paralelogramo $= \frac{331}{420} \times 81 = 63 + \frac{351}{420}$

aplicando pues las 63 unidades á los trapecios, y dexando la fraccion sobrante para el complemento que suponemos incógnito saldra lo mismo vease $80:63::1:\frac{63}{80}$

De todos modos aparece que el valor de la area comprendida en los trapecios de la fig. 9 no puede ser menos, ni mas que 63 unidades cuadradas, por que si valuamos dicho circulo por alguna razon menor que la verdadera, la fraccion sobrante perteneciente al complemento resulta menor que la primitiva por que los trapecios se completan tomando de ella la falta que padecian; y si con otra mayor que la verdadera, sale mayor que la primitiva por que los trapecios se desprenden del exceso, el cual encontramos reunido al complemento. De aqui es que la razon de Mecio es menor que la verdadera por que la dicha fraccion sobrante resulta $\frac{19}{113}$ menor de lo que era, y por lo contrario la razon de 105:331, es mayor que la verdadera por que la fraccion salió $\frac{1}{21}$ mayor de lo que era.

Tenemos concluido este asunto; y solo nos resta (para en seguida apuntar otro) valuar el circulo por cuantas fórmulas tenemos valuado el cuadrado de su diámetro; y supuesto que este es igual nueve, y que la razon del cuadrado al circulo inscripto es como 80:63.

20 Fórmula primera $80:63::9\times9:63+\frac{63}{80}=80:63::81:63+\frac{63}{80}$

21 Segunda supuesto el diámetro igual 9, y que la razon del diámetro á la circunferencia es como 20:63: luego $20:63::9:28+\frac{7}{20}$ luego $\left(\frac{28+\frac{7}{20}}{2}\right)\times\frac{9}{2}=\frac{567}{40}\times\frac{9}{2}=\frac{5103}{80}=63+\frac{63}{80}$

22 Tercera: en progresion Aritmetica de tantos términos cuantas unidades tiene de diámetro menos uno: advirtiendo que por el menos uno, se debe añadir á la suma de la progresion, el valor de un circulo de unidad de diámetro $=\frac{63}{80}$: bajo de este supuesto, decimos que la segunda unidad de diámetro forma el primer término $=2+\frac{29}{80}$ la diferiencia $=1+\frac{46}{80}$ el número de los términos $=9-1=8$: el último término $=13+\frac{31}{80}$; y supuesto queda advertido que á la suma de los indicados ocho términos se debe agregar el valor de un circulo de unidad de diámetro $=\frac{63}{80}$: luego $S=\left(2+\frac{29}{80}+13+\frac{31}{80}\right)\times\left(\frac{8}{2}\right)+\frac{63}{80}=63+\frac{63}{80}$.

23 Cuarta tambien en progresion Aritmética que se empieza por el centro fig. 10 poniendo en medio de el, una unidad de diámetro: la circunferencia que corresponde á esta unidad forma el primer término $=3+\frac{3}{20}$ la diferiencia $=6+\frac{6}{20}$ el número de los términos $=9-4=5$: el último término $=28+\frac{7}{20}$. Esta progresion que se compone de solo lineas, no sirve para el efecto, y si para formar otra de término menos, que es la úni-

ca que interesa, y que verificamos á imitacion de la del cuadrado fig. 3 quitando el primer término de cada uno de los cinco supuestos. Asaber: el primer término diximos $=3+\frac{3}{20}$: luego $3+\frac{3}{20}-3+\frac{3}{20}=0$: he aqui por que se reduce á otra de solos cuatro términos, y por que la area que encierra la primera circunferencia no es término y si una fraccion $=\frac{63}{80}$ que debe unirse á la suma de los qué ahora expresaremos colocando cada uno en su anillo respective. Por segundo término de la indicada progresion correspondia $9+\frac{9}{20}-3+\frac{3}{20}=6+\frac{6}{20}$ vease en el anillo primero. Por tercero correspondia $15+\frac{15}{20}-3+\frac{3}{20}=12+\frac{12}{20}$: vease en el anillo segundo. Por cuarto $22+\frac{1}{20}-3+\frac{3}{20}=18+\frac{18}{20}$ Por quinto $28+\frac{7}{20}-3+\frac{3}{20}=25+\frac{4}{20}$. Queda advertido que á la suma de los expresados cuatro términos debe agregarse el valor de la area que encierra la primera circunferencia $=\frac{63}{80}$ Luego $S=(6+\frac{6}{20}+25+\frac{4}{20})\times(\frac{4}{2})+\frac{63}{80}=63+\frac{63}{80}$.

24 Son muy dignas de consideracion las dos fórmulas en progresion Aritmética; mas en particular la última fig. 10, por ser la que nos facilita reducir la esfera á un cubo exácto; y el señalar la superficie muy próxima á la verdadera, cuyo único defecto es excederse en algo á la verdadera, á causa de que dividida en tantos conos, ó circulos paralelos perpendiculares al diámetro, cuantas unidades tenga este: como cada cono consta de dos distintos diámetros, el medio necesario, cuasi siempre aporta ser formado por la raiz de un número no cuadrado: pues á la manera que está multiplicada por si, produce otro número algo mayor que aquel de donde fue extraida, asi es preciso que nos produzca, ó descriva una circunferencia algo mayor que la verdadera: bien es que el exceso merece despreciarse por ser totalmente insensible en la practica.

25 Dicha fórmula nos ilustra hasta hacernos ver como un ángulo recto contando con que el radio es igual 60, equivale á noventa y cuatro grados y medio. Que un grado de longitud, tiene distinto valor en cada paralelo distinto. Que la esfera es un cuerpo tan sigular y perfecto, que no hay otro con quien poder compararlo. Que las esferas no están entre si en la razon de los cubos de sus diámetros. Que la esfera es algo menor que dos tercios del cilindro circunscripto.. Que la circunferencia maxima de la esfera multiplicada por todo el diámetro, no es igual á la superficie de ella, y sí á la convexá del cilindro circunscripto. Que el radio de la esfera, no tiene parte alguna que multiplicada por la superficie verdadera ó próxima á ella componga su cubo próximo. Que toda esfera valuada segun las reglas establecidas, esto es multiplicando la

circunferencia maxîma por todo el diámetro, y por un tercio de radio, siendo menor su diámetro de 42 unidades, produce un cubo mayor que el verdadero. Que toda esfera asi valuadá, siendo su diámetro mayor de 42 unidades, produce un cubo tanto menor que el verdadero, con propocion cuanto el diámetro mas se acrecienta.

26 Otras muchas cosas se infieren de la expresada fórmula cuya averiguacion no hemos tenido á bien emprender, por parecernos parte de ellas algo lexos de nuestros alcances; y porque no es regular engolfarnos mientras no se nos oiga, y censuren las indicadas: en abono de las cuales pondremos tres egemplares ya expuestos en otro papel, cuyo juicio al cabo de muchos meses aun no se han dignado comunicarnos; siendo asi que nuestros discursos aunque toscos no son indiscretos; pero primero á fin de que puedan compararse unos con otros, expondremos los mismos tres segun los principios y reglas que contradecimos; cuyo principal autor segun Monsieur Saverien fue el tan famoso Arquimedes. Este hombre reputado (y con razon) por uno de los ingenios mas profundos que se han conocido, despues de afirmar que la razon entre el diámetro y la circunferencia del circulo, era algo mas que como $1:3+\frac{10}{71}$ y algo menos que como $1:3+\frac{10}{70}$ para reducir la esfera á un cubo, se conformó con la última igual $7:22$; y en esta suposicion dexó dicho, que el cubo de la esfera es igual dos tercios del cilindro circunscripto: la cual proposicion admitida generalmente resulta aparentemente cierta del modo siguente: dado el diámetro de lá esfera, se busca la maxîma circunferencia por la dicha razon de $7:22$: hallada, se valua el circulo que contiene: valuado este, se multiplica por dos tercios de su diámetro, cuyo producto resulta igual dos tercios del cilindro circunscripto.

27 Por egemplo: se quiere reducir á un cubo una esfera de 6 pulgadas de diámetro: dicese $7:22::6:18+\frac{6}{7}$ consiguientemente $\left(\frac{18+\frac{6}{7}}{2}\right)\times\frac{6}{2}=\frac{132}{14}\times\frac{6}{2}=\frac{792}{28}=28+\frac{2}{7}$: luego $\left(28+\frac{2}{7}\right)\times\left(\frac{6}{3}\times 2\right)=113+\frac{1}{7}$ Pero la fórmula mas usual, y que nos hace mas al caso es la que sigue. Dado el diámetro de la esfera se busca la maxîma circunferencia por dicha razon de $7:22$: hallada se multiplica por todo el diámetro, cuyo producto suponen es el valor de toda la superficie: luego multiplican esta por un tercio de radio y este último producto es el que se tiene por cubo próxîmo de la esfera.

28 Por egemplo primero: sobre una esfera de diámetro igual 6 pulgadas dicese $7:22::6:18+\frac{6}{7}$ luego $\left(18+\frac{6}{7}\right)\times 6=113+\frac{1}{7}$ de superficie: luego $\left(113+\frac{1}{7}\right)\times\frac{3}{3}=113+\frac{1}{7}$

29 Por segundo: sobre una esfera de 42 unidades de diámetro dicese $7:22::42:132$: luego $132 \times 42 = 5544$ de superficie: luego $5544 \times \frac{21}{3} = 38808$.

30 Tercero sobre otra de diámetro $= 120$ digase $7:22::120:377 + \frac{1}{7}$: luego $(377 + \frac{1}{7}) \times 120 = 45257 + \frac{1}{7}$ $(45257 + \frac{1}{7}) \times \frac{60}{3} = 905142 + \frac{6}{7}$

31 Puestos los tres egemplares segun los principios y reglas establecidas: veamos los defectos que padecen segun nuestras aserciones apoyadas sobre la fraccion del centro de la fig. 10 comenzando por la esfera de 6 pulgadas de diámetro, decimos que su maxima circunferencia es menor que la verdadera $\frac{3}{70}$ la superficie por lo contrario, es mayor que la verdadera $29 + \frac{1}{7}$ unidades: como tambien el cubo es mayor que el verdadero $12 + \frac{12}{35}$ unidades. Otra repugnancia observamos sobre esta esfera, y es que su cubo se halla reducido á solo la superficie multiplicada por uno, cuya circunstancia es bien digna de notarse.

32 En la esfera de 42 unidades de diámetro, hallamos que su maxima circunferencia es menor que la verdadera $\frac{3}{10}$: que la superficie es mayor que la verdadera 1184 unidades; y no obstante estos defectos nos encontramos con que el cubo igual 38808 es muy cierto y verdadero segun nuestros principios: lo cual nos ha parecido un portento digno de la mayor admiracion: no tanto por la sutileza de Arquimedes su artifice: pues yá en otro papel tenemos apuntado la causa en que pudo consistir este acierto por caminos tan extraviados, cuanto porque no discrepa un pelo del nuestro, cuyo acaso sobre un cubo compuesto por un número tan considerable, nos parece el mas raro y estupendo que pudo darse.

33 Sobre la esfera de 120 unidades de diámetro, hallamos que la maxima circunferencia, es menor que la verdadera $\frac{6}{7}$ que la superficie es mayor que la verdadera $9637 + \frac{1}{7}$ unidades; y sin embargo compone un cubo menor que el verdadero $1805 + \frac{1}{7}$ unidades.

Pues ahora: supuesta la entereza con que acusamos los expresados defectos como dimanados de una doctrina indefensa: vamos á exponer la nuestra valuando las mismas tres esferas por nuestras reglas.

Dos tenemos que una á otra se comprueban plenamente. La primera y principal, yá dexamos indicado su fórmula, dividiendo la esfera en tantos conos paralelos perpendiculares al diámetro, cuantas unidades tenga este; por eso y porque yá se dió en otro papel, en que solo nos reservamos el modo de hallar el diámetro medio que corresponde á cada cono; y por otra parte es obra larga, y no poco engorrosa, la omitimos hasta ver si los inteligentes se dignan preguntarnos algo acerca de ella, pues aunque es cierto que por si solos pueden hallar dichos diámetros

medios, por haberles prodigado mas ideas que debiamos, sin embargo nada perderian en exâminarnos sobre otras cosas que se siguen.

La segunda se reduce á que dado el diámetro de la esfera, se le eleva al cubo: dado este, se busca el valor del cilindro inscripto por la razon de 80: 63: hallado se extrae de el una tercera parte, con mas 21 unidades por cada diez que tenga de diámetro y el residuo forma el cubo que se busca. Siendo pues esta tan sencilla y clara hemos tenido á bien preferirla: pues aunque no se extiende á manifestar la circunferencia maxima, ni la superficie que corresponde á cada esfera, basta que pongamos por separado al pie de cada egemplar una y otra, cuya demostracion se halla pronta para luego que nos la pidan, pues hasta entonces la omitimos por los respetos insinuados, y porque es de suponer, que la serie de diámetros que ofrecemos, no puede menos de estribar sobre fundamentos incontrastables. En el ínterin vayan los tres egemplares.

34 Primero: sobre una esfera cuyo diámetro es igual 6 pulgadas: luego 6x6x6= 216

el cilindro incripto en el expresado cubo resulta igual. . . . $170+\frac{1}{10}$

porque 80: 63:: 216: $170+\frac{1}{10}$ luego $\frac{170+\frac{1}{10}}{3} = 56+\frac{7}{10}$

mas 10: 21:: 6: $12+\frac{6}{10}$ . . . . $12+\frac{6}{10}$ } . $-69+\frac{3}{10}$

Circunferencia maxima= $18+\frac{9}{10}$ Superficie próxima=84 unidades Cubo. . . . . = $100+\frac{4}{5}$

35 Segundo sobre una esfera de diámetro igual 42 unidades: luego 42x42x42= 74088

su cilindro inscripto sale igual. . . . . $58344+\frac{3}{10}$

pues que 80: 63:: 74088: $58344+\frac{3}{10}$ luego $\frac{58344+\frac{3}{10}}{3}$ $19448+\frac{1}{10}$

mas 10: 21:: 42: $88+\frac{2}{10}$ . . . . $88+\frac{2}{10}$ } $-19536+\frac{3}{10}$

Circunferencia maxima=$132+\frac{3}{10}$ Superficie próxima 4360 Cubo = 38808

36 Tercero: es una esfera de 120 unidades de diámetro: luego 120x120x120= 1728000

su cilindro inscripto corresponde igual. 1360800

pues 80: 63:: 1728000: 1360800; luego $\frac{1360800}{3}$ = 453600

mas 10: 21:: 120: 252. 252 } -453852

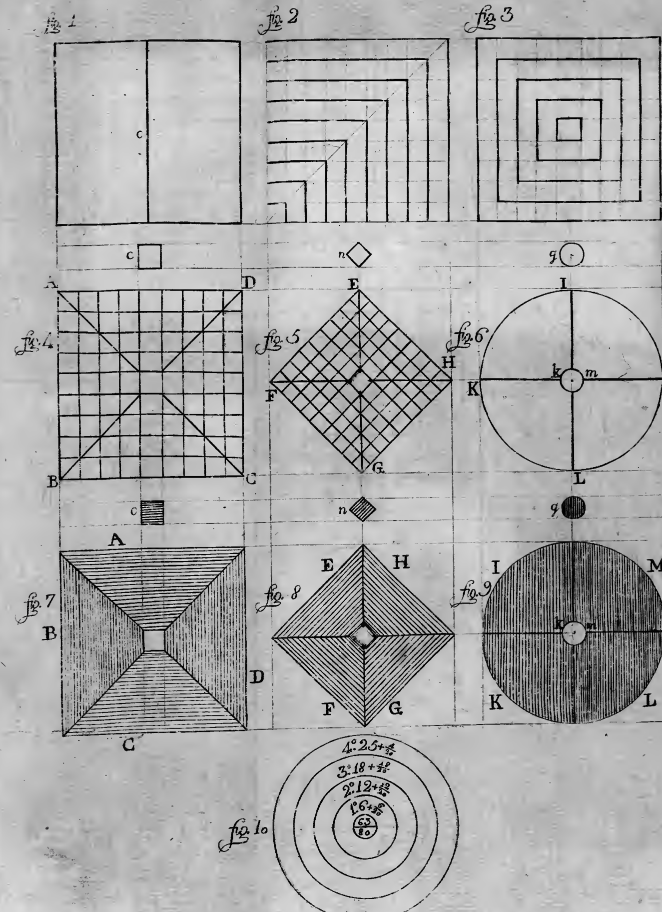
Maxima circunferencia=378 Superficie próxima 35620 Cubo = 906948

No tenemos á bien por ahora extendernos mas sobre este objeto pues el principal que nos movio á valuar las tres esferas por nuestras reglas, era evidenciar el pensamiento por cuantos medios sea posible; y como el diámetro medio de cada cono en que las tenemos dividido, forma otro testimonio de que la razon del diámetro á la circunferencia del circulo es como 20: 63: por eso las hemos reducido al cubo porque en solos los tres tenemos, 168 testimonios que suponemos irrecusables con la cual osadia finalizamos.

Advertencia dirigida únicamente á los discretos que no han cursado en Matemáticas, y que no obstante gozan de algun influxo sobre los profesores mas impuestos en las súblimes: á quienes como es regular darán á exâminar nuestro papel, para que dado que se esquiven en desprecio del asunto, no les atiendan ni dén asenso á censuras reducidas á palabras, pues estas en boca de maestros acreditados, al paso que á los no impuestos en estas artes, les obligan á creer que no es posible que el que firma (cuya única profesion es comerciante de poca consideracion) haya verificado lo que tantos sabios de primer órden no pudieron: dan lugar á sospechar que no saben escribir; esto es que no encuentran dificultad que oponernos; si asi no fuese, nuestro (al parecer demasiado) atrevimiento en afirmar por escrito y por figuras, que nó puede darse en matemáticas otra proposicion mas infalible, ni mas claramente evidenciada, les obliga por escrito autorizado con su firma aque figuren lo contrario: esto está en el órden no verificándolo asi, cuanto digan de palabra debe reputarse por nada: pues ¿qué importa digan que los maestros antiguos y modernos dexaron dicho que el problema de la cuadratura es insoluble, si no lo demuestran, ni hacen ver que no podian engañarse ni engañarnos? ¿ni que ponderen nuestra insuficiencia diciendo que, si la razon de 20:63. fuese la verdadera, era imposible habérseles ocultado á tantos insignes geómetras, si esto nada arguye, ni hace fuerza sino al vulgo mas indiscreto?

Otras muchas tenemos apuntadas para cuantos racionales se interesen en que las ciencias exâctas lleguen á su mayor perfeccion: las cuales aunque en términos poco cultos como hijos de nuestro idioma, llevan consigo cierta energía, capaz de electrizar á cualquiera hasta tomar la causa por suya; pero las omitimos por ahora en atencion á lo dicho, y á que en viendo se trata de alucinarlos con palabras estudiadas, es de esperar les ocurra la mas oportuna respuesta: nosotros no lo entendemos; corra la pluma como es regular, y á los autores con esas. Confiamos en que si esto se verifica no será menester advertir otra cosa.

A los Señores inteligentes, para quienes serán ináuditas estas tareas, por no haber llegado hasta ahora á su noticia suplicamos se dignen dispensarnos su censura, segun su inteligencia, y la recta razon les dicte. Previniéndoles como entre otras demostraciones practicas tenemos una con arreglo al primer principio: en cuya fig. se nos representan otros dos pensamientos quizás mas interesantes de lo que nosotros mismos concebimos. Tenemos además una idea que nos mortifica por figurarsenos muy interesante á la Marina siendo esta la que nos abrió el sentido.


fig. 1
fig. 2
fig. 3
c
n
q
A
D
E
I
fig. 4
fig. 5
fig. 6
H
F
K
k
m
M
B
C
G.
L
A
E
H
I
M
fig. 7
fig. 8
fig. 9
B
D
F
G
K
L
C
fig. 10

